OMAP - 3ª FASE - NÍVEL 3

(OBMEP - 2014) Cinco meninas não estão totalmente de acordo sobre a data da prova de Matemática.

• Andrea diz que será em agosto, dia 16, segunda-feira;
• Daniela diz que será em agosto, dia 16, terça-feira;
• Fernanda diz que será em setembro, dia 17, terça-feira;
• Patrícia diz que será em agosto, dia 17, segunda-feira;
• Tatiane diz que será em setembro, dia 17, segunda-feira.

Somente uma está certa, e as outras acertaram pelo menos uma das informações: o mês, o dia do mês ou o dia da semana. Quem está certa?

Andrea
Daniela
Fernanda
Patrícia
Tatiane

(OBMEP - adaptada) Cinco meninas não estão totalmente de acordo sobre a data da prova de Matemática.

• Andrea diz que será em janeiro, dia 19, quinta-feira;
• Beatriz diz que será em janeiro, dia 19, sexta-feira;
• Carla diz que será em fevereiro, dia 20, sexta-feira;
• Daniela diz que será em janeiro, dia 20, quinta-feira;
• Emília diz que será em fevereiro, dia 20, quinta-feira.

Somente uma está certa, e as outras acertaram pelo menos uma das informações: o mês, o dia do mês ou o dia da semana. Quem está certa?

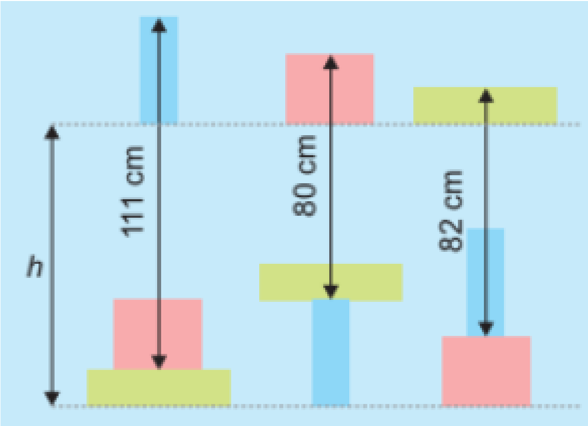
Andrea
Beatriz
Carla
Daniela
Emília

QUESTÃO 3
ALTERNATIVA D
Podemos organizar as informações numa tabela:

	mês	dia do mês	dia da semana
Andrea	agosto	16	segunda
Daniela	agosto	16	terça
Fernanda	setembro	17	terça
Patrícia	agosto	17	segunda
Tatiane	setembro	17	segunda

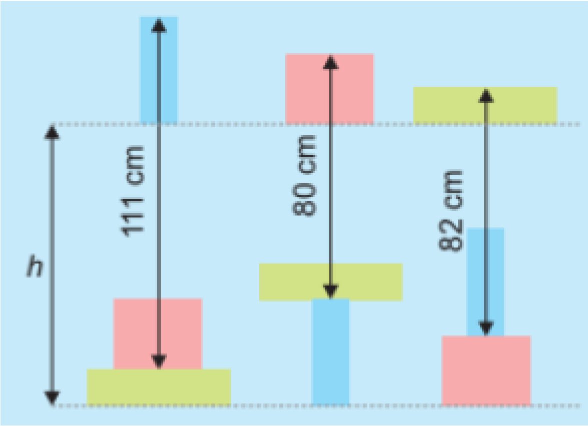
Se Andrea estivesse certa, então Fernanda não acertaria nenhuma das informações. Logo, não é ela que está certa, nem Fernanda (pelo mesmo motivo). Se Daniela estivesse certa, então Tatiane também nada acertaria. Logo Daniele e Tatiane não estão certas. Se Patrícia acertar tudo, as demais também acertarão alguma informação e, portanto, Patrícia é a única que está certa.

(OBMEP - 2019) Na figura, os lados dos retângulos são horizontais ou verticais, e os retângulos de mesma cor são idênticos. Qual é o valor de h?



88
89
90
91
92

(OBMEP - adaptada) Na figura, os lados dos retângulos são horizontais ou verticais, e os retângulos de mesma cor são idênticos. O valor de h é



múltiplo de 10
múltiplo de 11
múltiplo de 12
múltiplo de 13
múltiplo de 14

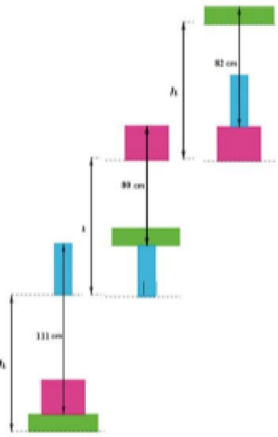
QUESTÃO 4
ALTERNATIVA D

Representando graficamente as três situações uma no topo da outra, como na figura ao lado, observamos que a soma das três medidas corresponde a 3 vezes a distância h (o bloco verde debaixo compensa com o bloco verde do topo).

Logo, $h = \frac{113+80+82}{3} = 91$ cm.

OUTRA SOLUÇÃO:

Cada uma das distâncias nas três figuras pode ser expressa em termos de h e das alturas de dois dos blocos:
111 = h – bloco verde + bloco azul
80 = h – bloco azul + bloco rosa
82 = h – bloco rosa + bloco verde
Cada bloco aparece uma vez nessas igualdades com sinal positivo e outra com sinal negativo.
Portanto, ao somá-las, eles se cancelam. Temos, assim:
$111 + 80 + 82 = 3h$
Logo, $3h = 273$ e, portanto, h = 91 cm.



(OBMEP - 2014) O símbolo n! é usado para representar o produto dos números naturais de 1 a n, isto é, $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Por exemplo, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Se $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, qual é o valor de n?
13
14
15
16
18

(OBMEP - adaptada) O símbolo n! é usado para representar o produto dos números naturais de 1 a n, isto é, $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Por exemplo, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Se $n! = (2^5 \cdot 3^2)^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, qual é o valor de $(n-1)$?
13
14
15
16
18

QUESTÃO 12
ALTERNATIVA D

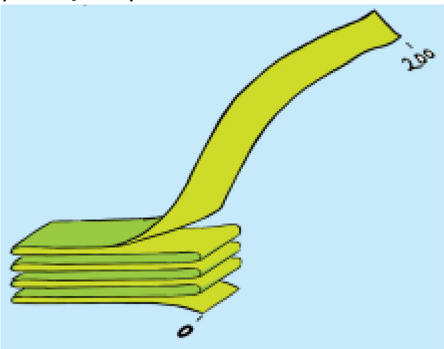
Como $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, tem-se $n \geq 13$. Por outro lado,

$13! = 13 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 = 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 3^5 \cdot 2^{10}$,

E, portanto, $\frac{n!}{13!} = \frac{2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}{13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 3^5 \cdot 2^{10}} = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 14 \cdot 15.16$.

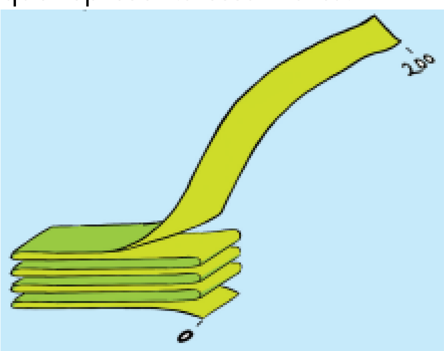
Logo, $n! = 13! \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 16!$, ou seja, $n = 16$.

(OBMEP - 2014) Rodrigo brinca com uma fita de dois metros, com marcas de centímetro em centímetro. Começando pela ponta de marca 0 cm, ele dobra a fita várias vezes em zigue-zague, como na figura, sobrepondo pedaços de fita de mesmo tamanho até dobrar um último pedaço, que pode ser menor do que os demais. Ele observa que as marcas de 49 cm e de 71 cm ficaram sobrepostas em pedaços vizinhos. Ele observa também que a marca de 139 cm ficou alinhada com elas. Com qual marca do penúltimo pedaço a ponta final da fita ficou sobreposta?



160
176
184
190
196

(OBMEP - adaptada) Rodrigo brinca com uma fita de dois metros, com marcas de centímetro em centímetro. Começando pela ponta de marca 0 cm, ele dobra a fita várias vezes em zigue-zague, como na figura, sobrepondo pedaços de fita de mesmo tamanho até dobrar um último pedaço, que pode ser menor do que os demais. Ele observa que as marcas de 49 cm e de 71 cm ficaram sobrepostas em pedaços vizinhos. Ele observa também que a marca de 139 cm ficou alinhada com elas e a ponta final da fita ficou sobreposta com uma marca do penúltimo pedaço. Pensando nisso, assinale a expressão que representa essa marca.



$160 = 2^4.4^{1/2}.5 = 2^4.4^{0,5}.5 = 2^4 . \sqrt{4} .5$

$176 = 2^3.4^{1/2}.11 = 2^3.4^{0,5}.11 = 2^3 . \sqrt{4}. 11$

$184 = 2.\ 4^{1/2}.23 = 2.\ 4^{0,5}.23 = 2.\ \sqrt{4}\ .\ 23$

$190 = 2.25^{1/2}.19 = 2.25^{0,5}.19 = 2.\sqrt{25}\,.19$

$196 = 2^{2}.7.49^{1/2} = 2^{2}.7.49^{0,5} = 2^{2}.\ 7.\ \sqrt{49}$

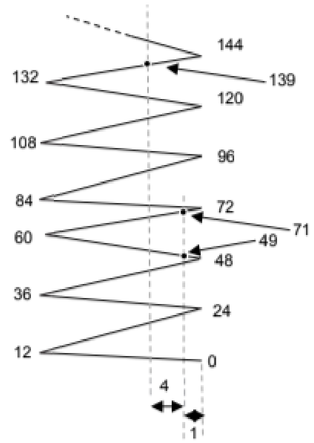
QUESTÃO 20
ALTERNATIVA D

Como as marcas 49 e 71 ficaram sobrepostas em pedaços que são vizinhos, houve uma dobra exatamente no ponto médio, isto é, em $(49+71)/2 = 60$. Como o processo iniciou-se com a marca 0, o tamanho de cada pedaço, isto é, a distância entre duas dobras sucessivas, deve ser um divisor de 60. Os divisores de 60 são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e o próprio 60. Mas, estando 49 e 71 em pedaços vizinhos, descartamos os divisores 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 10 pois a distância de 49 (ou 71) até a dobra 60 é 11, maior do que todos eles. Resta decidir qual é o tamanho de cada pedaço dentre as possibilidades 12, 15, 20, 30 ou 60 e, para isto, usaremos a informação de que a marca 139 ficou alinhada com 49 e 71.

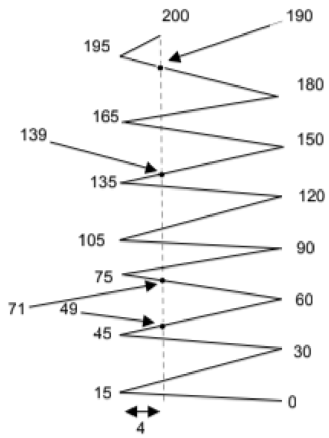
As distâncias da marca de 139 aos dois pontos anteriores são, respectivamente, 90 e 68. Como a marcação de 139 coincide com as anteriores, uma dessas distâncias deve ser um múltiplo do dobro do tamanho da dobra, ou seja, deve ser um múltiplo de 24, 30, 40, 60 ou 120. Mas 68 não é um múltiplo de nenhum desses números, enquanto 90 é múltiplo apenas de 30. Portanto, o tamanho de cada pedaço é 15, o que faz com que a última dobra ocorra na marca de 195 cm e, daí, ao dobrar-se o último pedaço, a marca de 200 cm fica sobre $195-(200-195)=190$ cm.

As figuras a seguir ilustram o que acontece para os cinco possíveis valores das medidas dos pedaços.

Se o tamanho de cada pedaço fosse igual a 12, teríamos a situação descrita pela figura ao lado e a marca 139 não estaria alinhada com 71 e 49. Logo, este caso não ocorre.

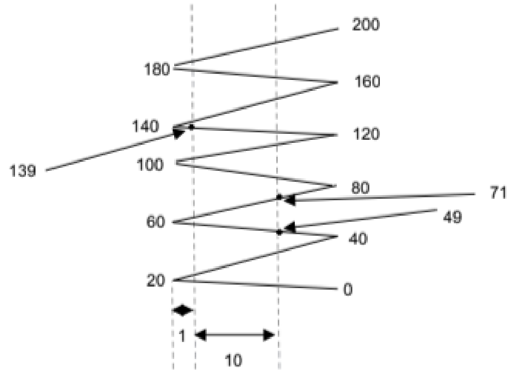


Se o tamanho de cada pedaço fosse igual a 15, teríamos a seguinte situação:



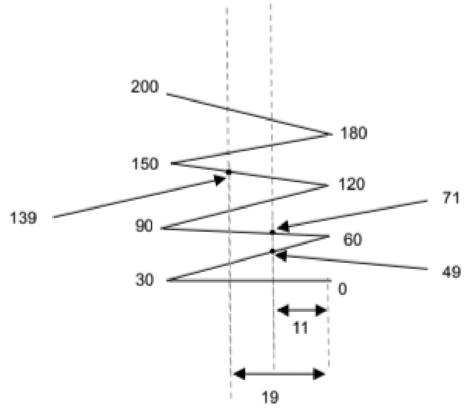
Este é o único caso correto. De fato, veremos a seguir que os demais casos não podem ocorrer:

Se o tamanho de cada pedaço fosse igual a 20, teríamos a seguinte situação:

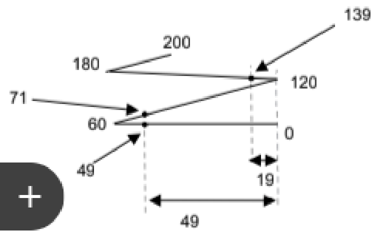


Este caso também não pode ocorrer pois 139 não se alinha com 49 e 71.

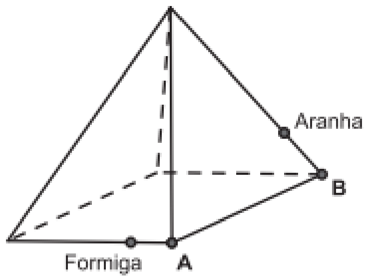
Se o tamanho de cada pedaço fosse igual a 30, teríamos a seguinte situação:



E vemos que também este caso também não ocorre.
Finalmente, se o tamanho de cada pedaço fosse igual a 60, teríamos a seguinte situação:
Este último caso também não ocorre.



(OBMEP - 2011) A figura representa uma pirâmide de base quadrada cujas arestas medem 1 m. Uma formiga e uma aranha estão nas posições indicadas, a 25 cm dos vértices A e B, respectivamente. Qual é a menor distância que a aranha deve percorrer para chegar até a formiga, andando somente sobre as faces triangulares da pirâmide?



1 m

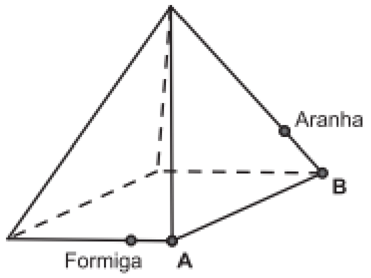
$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ m

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ m

$\frac{\sqrt{5}}{3}$ m

$\frac{4}{5}$ m

(OBMEP - 2011) A figura representa uma pirâmide de base quadrada cujas arestas medem 1m. Uma formiga e uma aranha estão nas posições indicadas, a 25 cm dos vértices A e B, respectivamente. Usando $\sqrt{3} = 1{,}7$ e $\sqrt{5} = 2{,}2$, qual é a menor distância que a aranha deve percorrer para chegar até a formiga, andando somente sobre as faces triangulares da pirâmide?



100 cm

135 cm

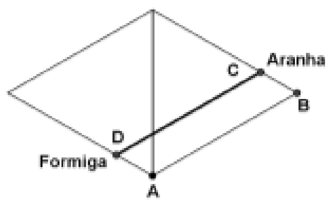
85 cm

73,3 cm

80 cm

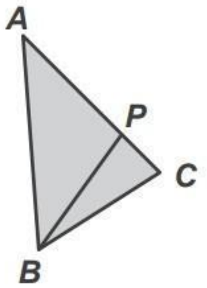
QUESTÃO 10
ALTERNATIVA A

As faces laterais da pirâmide são triângulos equiláteros de lado 1. Planificando as faces que contém como aresta comum o segmento que liga o ponto A ao vértice superior da pirâmide, obtemos um losango com a aranha (ponto C) e a formiga (ponto D) em lados opostos, conforme a figura.



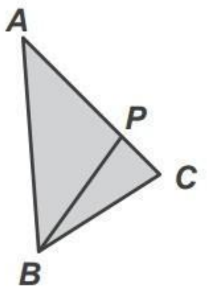
O trajeto mais curto que a aranha deve percorrer para chegar até a formiga corresponde ao segmento CD. Como $AD = BC$ e lados opostos de um losango são paralelos, segue que $ABCD$ é um paralelogramo. Logo $CD = AB = 1\text{m}$.

(OCM – 2021) No triângulo ABC, os lados AB e AC têm a mesma medida. Se as medidas dos segmentos AP, PB e BC são iguais, qual é a medida do ângulo Â?



20°
24°
30°
36°
40°

(OCM – adaptada) No triângulo ABC, os lados AB e AC têm a mesma medida. Se as medidas dos segmentos AP, PB e BC são iguais, qual é a medida do suplemento do ângulo Â?



36°
54°
72°
108°
144°

Denote por a a medida do ângulo A. O triângulo ABP é isósceles, logo, os ângulos da base medem ambos a, o ângulo BPC é externo ao triângulo ABP e portanto mede $2a$. Mas o triângulo PBC também é isósceles e tem base PC, logo o ângulo em C mede $2a$. Como ABC é isósceles, o ângulo ABC mede $2a$. Somando os ângulos internos do triângulo ABC, chegamos a $2a + 2a + a = 5a = 180^{\circ}$, donde $a = 36^{\circ}$.